# Ψηφιακή Σχεδίαση

**Ενότητα 2:** Αλγεβρα Boole, Δυαδική Λογική, Ελαχιστόροι, Μεγιστόροι

Δρ. Μηνάς Δασυγένης
mdasyg@ieee.org
Εργαστήριο Ψηφιακών Συστημάτων και Αρχιτεκτονικής Υπολογιστών
http://arch.icte.uowm.gr/mdasyg

# Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ψηφιακά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σκοπός της ενότητας

- Να γίνει εισαγωγή στην άλγεβρα Boole,
- Να γίνει ανάλυση δυαδικής λογικής, τους ελαχιστόρους και τους μεγιστόρους.

# Ιστορικά στοιχεία

- 1854 Boole συστηματική αντιμετώπιση λογικής.
- 1904 Huntington έδωσε 3 αξιώματα.
- 1938 Shannon δημιούργησε άλγεβρα Boole με 2 τιμές.

**Θα ασχοληθούμε με τη δίτιμη άλγεβρα BOOLE που ορίζεται στο σύνολο B = [ 0, 1 ].**

# Δυαδική Λογική

- Ασχολείται με δυαδικές μεταβλητές που παίρνουν 2 διακριτές τιμές ( 0 και 1) και με λογικές ( δυαδικές ) πράξεις.
- 3 βασικές πράξεις:
  - AND, OR, NOT
- Δυαδικές / Λογικές μεταβλητές αναπαριστούνται από γράμματα:

  A, B, C, … ,X, Y, Z

# Συναρτήσεις Δυαδικής Λογική

- F( vars ) = έκφραση
  - vars: Σύνολο δυαδικών μεταβλητών.
  - Έκφραση:
    - Τελεστές( +, *, ΄ )
    - Μεταβήτές ( 0, 1 )
    - Σταθερές ( 0, 1 )
    - Ομαδοποίηση ( παρενθέσεις )
- Παράδειγμα: $F(a, b) = a' \bullet b' + b'$

  $G(x, y, z) = x \bullet (y + z')$

# Βασικοί λογικοί Τελεστές

- Δυαδικοί ( Binary ):
  - AND ( Επίσης: •, ∧ )
  - OR ( Επίσης: +, ∨ )
- Μοναδιαίοι ( Unary ):
  - NOT ( Επίσης: ΄, − )

F( a, b ) = a • b διαβ. F = 1 **αν και μόνο αν** a = b = 1

G( a, b ) = a + b διαβ. G = 1 αν a = 1 ή αν b = 1

H( a ) = a΄ διαβ. H = 1 αν a = 0

# Βασικοί Λογικοί Τελεστές (συνέχεια)

- Λογικό AND ενός bit ( 1-bit ), μοιάζει με δυαδικό πολλαπλασιασμό:
  - $0 \bullet 0 = 0$, $0 \bullet 1 = 0$, $1 \bullet 0 = 0$
  - $1 \bullet 1 = 1$
- Λογικό OR ενός bit ( 1-bit ), μοιάζει με δυαδική πρόσθεση, εκτός από μία πράξη:
  - $0 + 0 = 0$
  - $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 1$ ( $\neq 10_2$ )

# Πίνακες Αληθείας για Λογικές Πύλες

- **Ερώτηση:** Η συνάρτηση F( ) εξαρτάται από n μεταβλητές. Πόσες γραμμές υπάρχουν στον αληθοπίνακα του F( );

- **Απάντηση:** $2^n$ γραμμές, αφού υπάρχουν $2^n$ πιθανοί δυαδικοί συνδυασμοί ( patterns ) για n μεταβλητές.

# Παράδειγμα (1)

- Ένας πίνακας αληθείας παριστάνει τη συνάρτηση μεταξύ των εισόδων και της εξόδου ενός λογικού συστήματος. Για δυο εισόδους υπάρχουν τέσσερις πιθανοί συνδυασμοί πραγματικών τιμών:

  ***FF, FT, TF, TT***

- Επειδή κάθε δυνατή είσοδος μπορεί να δώσει δύο διαφορετικές εξόδους ***( F, T )**** συνεπάγεται ότι οι δυνατοί πίνακες αληθείας για ένα λογικό σύστημα δύο εισόδων είναι **$2^4$ = 16**.

*( F: False, T: True )

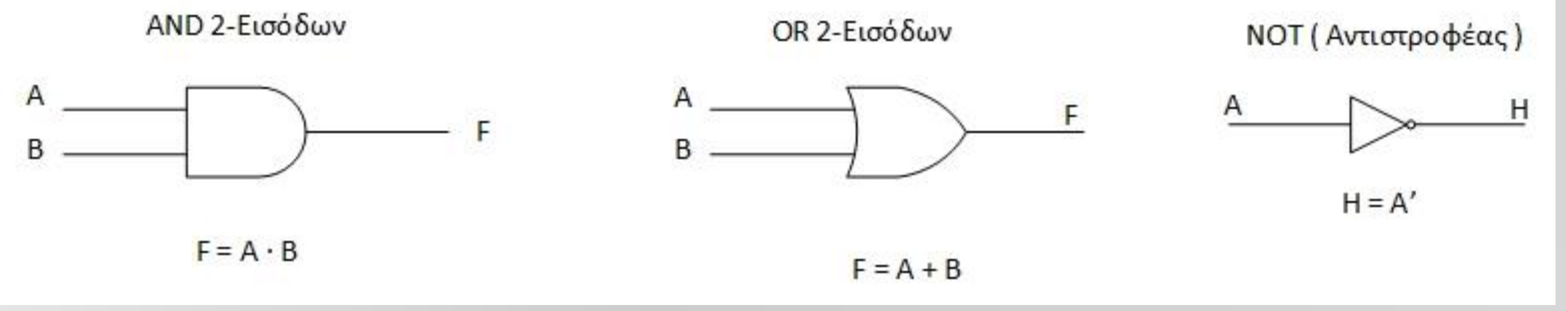
# Παράδειγμα (2)

Όλοι οι πίνακες αληθείας για δύο εισόδους Α. Β και μία έξοδο Ζ

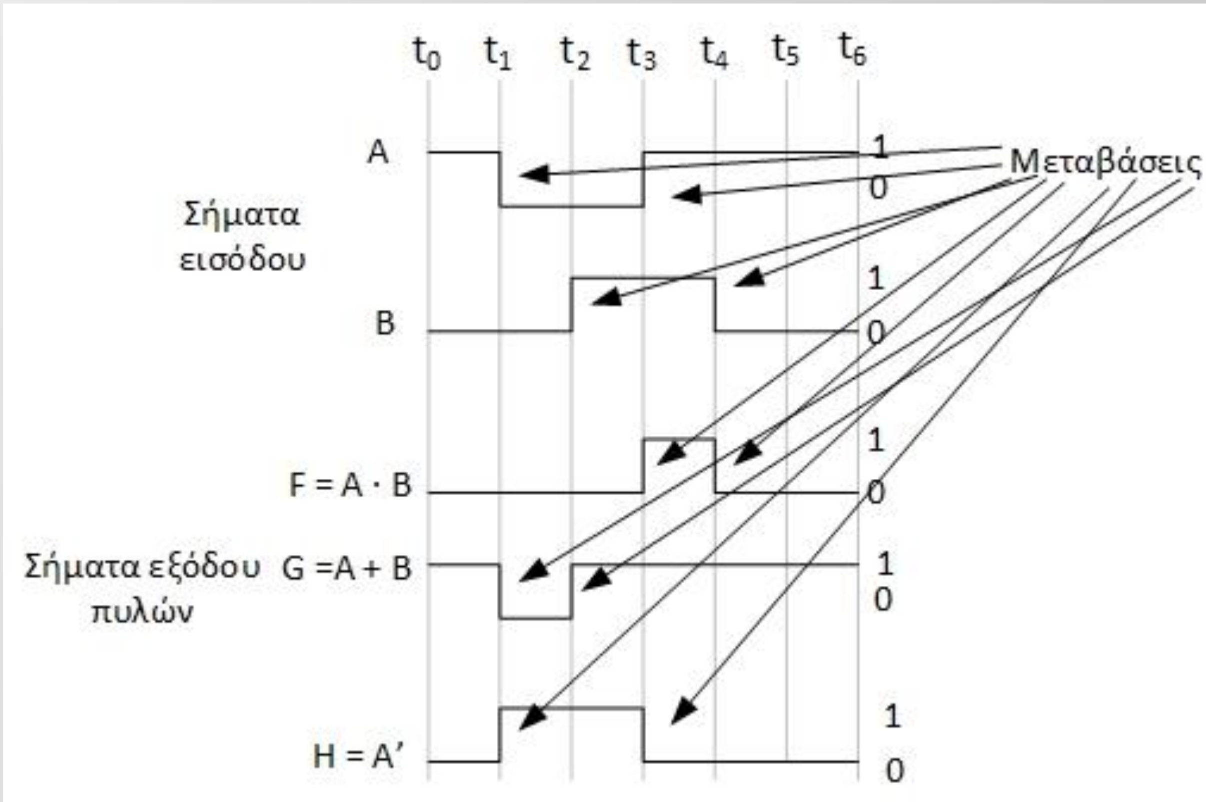
| | τιμές εισόδου | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | F | F | T | T | | |
| B | F | T | F | T | Συνάρτηση (έξοδος Ζ) | Σύμβολο |
| 0 | F | F | F | F | πάντοτε 0 | 0 |
| 1 | F | F | F | T | AND | $A \cdot B$ |
| 2 | F | F | T | F | - | - |
| 3 | F | F | T | T | είσοδος Α | $A$ |
| 4 | F | T | F | F | - | - |
| 5 | F | T | F | T | είσοδος Β | $B$ |
| 6 | F | T | T | F | XOR | $A \oplus B$ |
| 7 | F | T | T | T | OR | $A + B$ |
| 8 | T | F | F | F | NOR | $\overline{A + B}$ |
| 9 | T | F | F | T | XNOR | $\overline{A \oplus B}$ |
| 10 | T | F | T | F | Not B | $\overline{B}$ |
| 11 | T | F | T | T | - | - |
| 12 | T | T | F | F | Not A | $\overline{A}$ |
| 13 | T | T | F | T | - | - |
| 14 | T | T | T | F | NAND | $\overline{A \cdot B}$ |
| 15 | T | T | T | T | πάντοτε 1 | 1 |

# Λογικές Πύλες

- Οι λογικές πύλες είναι **αφαιρετικά μοντέλα** στοιχείων ηλεκτρονικών κυκλωμάτων που λειτουργούν με ένα ή περισσότερα σήματα εισόδου και παράγουν ένα σήμα εξόδου.



# Waveforms ( κυματομορφές )

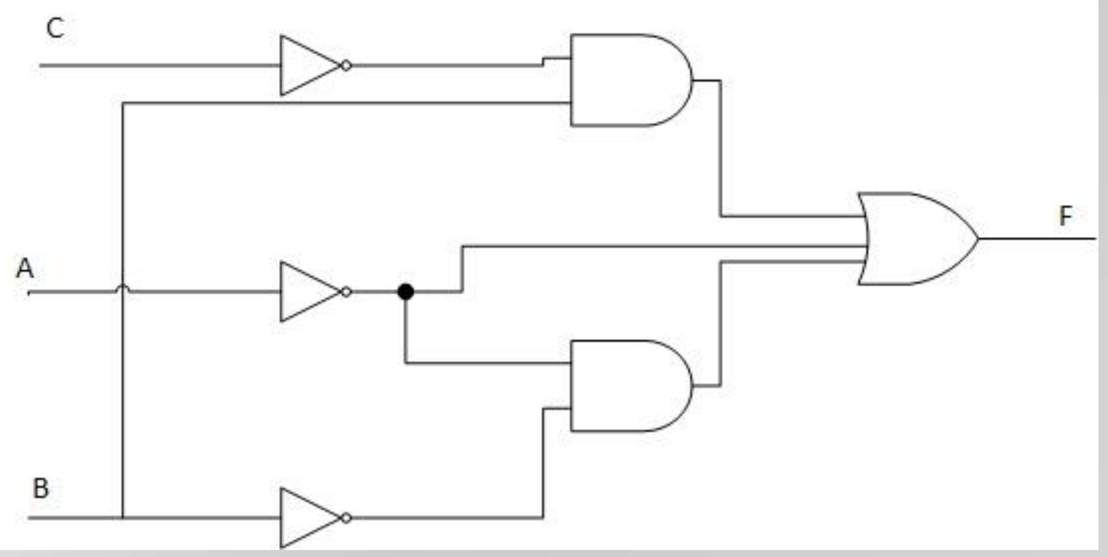



Προϋπόθεση : Ο χρόνος μετάδοσης του σήματος μεταξύ πυλών είναι αμελητέος (0)

# Συνδιαστικά Λογικά Κυκλωματα

- Θεωρήστε την συνάρτηση F = A + B • C′ + A • B′
- Ένα συνδυαστικό κύκλωμα μπορεί να κατασκευαστεί για την υλοποίηση της F, με την κατάλληλη ένωση σημάτων εισόδου και λογικών πυλών:
  - Σήματα εισόδου → από τις μεταβλητές της συνάρτησης ( A, B, C ).
  - Σήματα εξόδου → συνάρτηση εξόδου ( F ).
  - Λογικές Πύλες → από λογικές πράξεις.

# Συνδιαστικά Λογικά Κυκλωματα (2)



# Συνδιαστικά Λογικά Κυκλωματα (3)

- Για να σχεδιάσουμε ένα αποδοτικό κλυκλωμα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το μέγεθος του κυκλωματος ( circuit size ) και την καθυστέρηση διάδοσης ( propagation delay = χρόνος που χρειάζετα ένα σήμα εισόδου να αλλάξει για να γίνει αντιληπτό στην έξοδο ).
- Στον πίνακα αληθείας δίπλα:

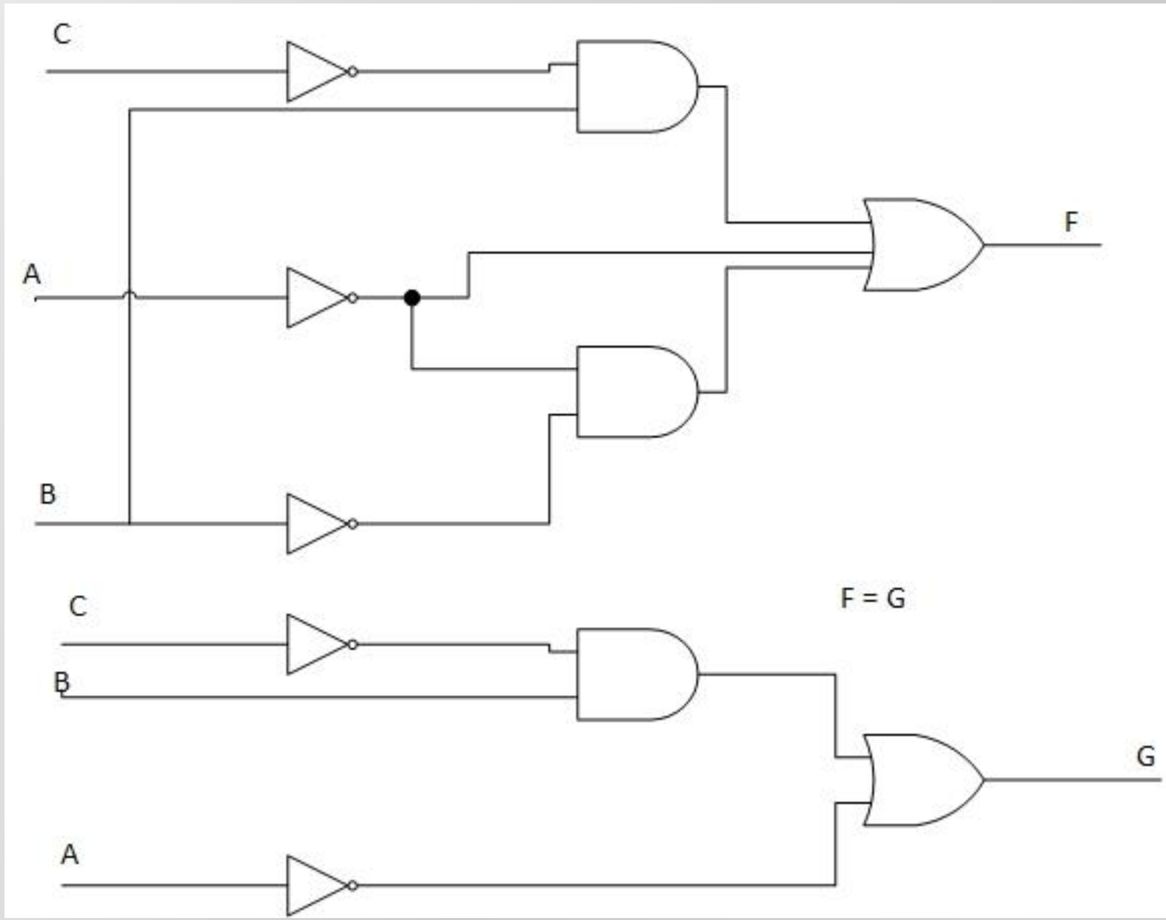
$F = A' + B \bullet C' + A' \bullet B'$ και

$G = A' + B \bullet C'$

- Οι πίνακες για τις F και G είναι οι ίδιοι → ίδια συνάρτηση ( F = G ).
- Η G υλοποιεί την λογική του κυκλώματος με λιγότερα στοιχεία.

| A | B | C | F | G |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# Συνδιαστικά Λογικά Κυκλωματα (4)



# Άλγεβρα Boole

- Χρήσιμος μηχανισμός για τον χειρισμό / μετασχηματισμό ( απλοποίηση ) δυαδικών συναρτήσεων.
- George Boole ( 1815 – 1864 ): «Μια έρευνα για τους νόμους της σκέψης».
- Ορολογία:
  - Παράγοντας ( Literal ): Μεταβλητή ή το συμπλήρωμα της
  - Όρος παραγόντω ( Term ): Υλοποιούν μια πύλη.
    - Πολλαπλασιαστικός όρος ( Product term ): παράγοντες ενωμένοι με • ( AND ).
    - Αθροιστικός όρος ( Sum term ): παράγωντες ενωμένεοι με ( OR ) .

# Αξιώματα Άλγεβρας Boole

X: Δυαδική μεταβλητή, 0, 1: σταθεροί

1. X + 0 = X – Αξίωμα μηδενικότητας ( ουδέτερο στοιχείο ως προς + )
2. X • 1 = X – Μοναδιαίο αξιωμα ( ουδέτερο στοιχείο ως προς • )
3. X + 1 = 2 – Μοναδιαία ισότητα
4. X • 0 = 0 – Ιδιότητα μηδενικότητας
5. X + X΄= 1 – Συμπληρωμα ( ως προς + )
6. X • X΄ = 0 – Συμπλήρωμα ( ως προς • )
7. X  + X = X – Idempotence ( ταυτοδυναμία ) ( ως προς + )
8. X • X = X – Idempotence ( ταυτοδυναμία ) ( ως προς • )
9. (X΄)΄= X – Involution ( δυο αρνησεις )

# Βασικά Θεωρήματα άλγεβρας Boole (1)

X: δυαδική μεταβλητή, 0,1: σταθεροί

- $X + X = X$ -- Idempotence ( ταυτοδυναμία ) ( ως προς + )
- $X \cdot X = X$ -- Idempotence ( ταυτοδυναμία ) ( ως προς · )
- $( X' )' = X$ -- Involution ( δυο αρνήσεις )

# Βασικά Θεωρήματα άλγεβρας Boole (2)

- Αντιμεταθετική

$x + y = y + x$

$x * y = y * x$

- Προσεταιριστική

$x + ( y + z ) = ( x + y ) + z$

$x * ( yz ) = ( xy ) * z$

- Επιμεριστική

$x ( y + z ) = xy + xz$

$x+ yz = ( x + y )( x+z )$

# Ιδιότητες Άλγεβρας Boole

- Αντιμεταθετική ιδιότητα
  - $A + B = B + A, \quad A \bullet B = B \bullet A$
- Απορροφητική ιδιότητα
  - $A + (A \bullet B) = A, \quad A \bullet (A + B) = A$
- Προσεταιριστική ιδιότητα
  - $A + (B + C) = (A + B) + C, \quad A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C$
- Επιμεριστική ιδιότητα
  - $A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C), \quad A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$

- Κανόνες De Morgan

$\overline{A + B} = \overline{A} \bullet \overline{B}$

$\overline{A \bullet B} = \overline{A} + \overline{B}$

# Άλλες ιδιότητες

- Κανόνας ελαχιστοποίησης
  - $A \bullet B + A \bullet \overline{B} = A$
  - $( A + B ) \bullet ( A + \overline{B} ) = A$
- Να αποδειχτεί ότι:
  - $( A + B ) ( A + \overline{B} ) = AA + A\overline{B} + AB + B\overline{B}$

$$= A + A\overline{B} + AB + 0$$
$$= A + A ( \overline{B} + B )$$
$$= A + A$$
$$= A$$

# Άλλες ιδιότητες (2)

- Να αποδειχθεί ότι:
  - $AB + A\overline{B} = A$
  - $A + (AB) = A(A + B) = A$

- Απάντηση:
  - $AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A \bullet 1 = A$

    $A + (AB) = AA + AB = A(A + B)$

    $A + (AB) = A(1 + B) = A \bullet 1 = A$

| A | A • B | A + ( A • B ) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | B | 1 |

  - Χρήση του πίνακα αληθείας

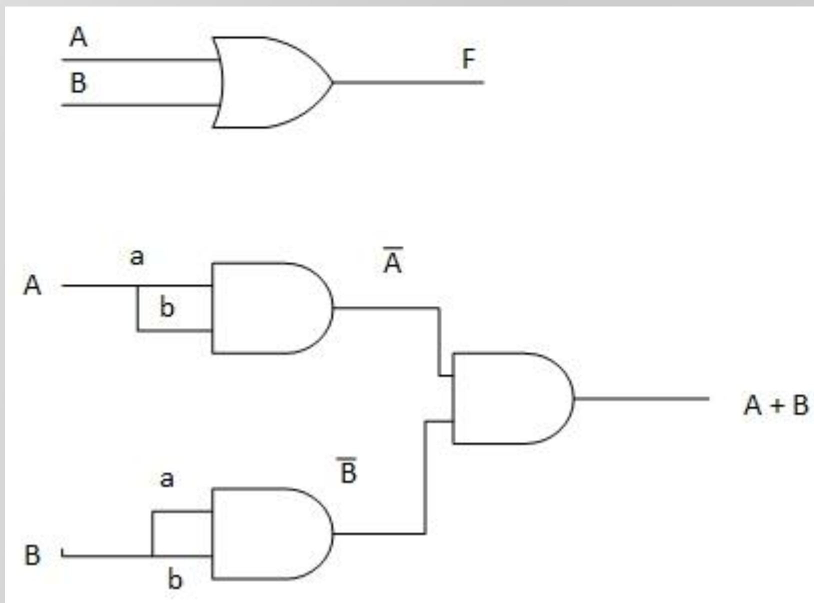
# Θεώρημα De Morgan (1)

- Τα θεωρήματα De Morgan είναι πιο σημαντικά στην λογική σχεδίαση όπου συσχετίζονται AND και NOR πύλες, ή OR και NAND πύλες.
- Για παράδειγμα χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα De Morgan για να σχεδιάσουμε ένα συνδυασμό πυλών NAND που είναι ισοδύναμος με μια πύλη OR δύο εισόδων.

# Θεώρημα De Morgan (2)

- Για μια πύλη OR ισχύει: $f = A + B = \overline{\overline{A} \bullet \overline{B}}$

  επίσης: $\overline{A \bullet A} = \overline{A}$



# Προτεραιότητα Τελεστών

1. Παρενθέσεις ( )
2. ΌΧΙ
3. ΚΑΙ
4. Η΄

# Η αρχή του δυϊσμού

- Ο δυισμός ( dual ) μιας έκφρασης παράγεται με την ανταλλαγή ( * και + ) και ( 1 και 0 ) δεδομένου ότι η σειρά των πράξεων δεν αλλάζει.
- Δεν μπορεί να ανταλλαχθεί το x με x'.
- Παράδειγμα:
  - $F'( x, y, z ) = x'yz' + x'y'z$
  - Ο δυϊσμός ( dual ) της F είναι
  - $F^{( dual )} = ( x' + y + z' ) + ( x' + y' + z )$
- Το dual δεν ισούται πάντα με την αρχική έκφραση.
- Εάν μια λογική εξίσωση/ισότητα είναι έγκυρη, τότε το dual της είναι και αυτό έγκυρο.

# Η αρχή του δυϊσμού (2)

- Βάση της αρχής του δυϊσμού, οι ιδιότητες/θεωρήματα 1-8 έχουν τις ακόλουθες σχέσεις:

1. $X + 0 = X$    2. $X \cdot 1 = X$    ( dual του 1 )

3. $X + 1 = 1$    4. $X \cdot 0 = 0$    ( dual του 3 )

5. $X + X = X$    6. $X \cdot X = X$    ( dual του 5 )

7. $X + X' = 1$    8. $X \cdot X' = 0$    ( dual του 8 )

# Θεώρημα Απορρόφησης

1. $x + x \bullet y = x$
2. $x \bullet ( x + y ) = x$ ( δυϊσμός του 1. )

- Απόδειξη:
  - $x + x \bullet y = x \bullet 1 + x \bullet y$

    $= x \bullet ( 1 + y )$

    $= x \bullet 1$

    $= x$

  Το 2 αληθές λόγω δυϊσμού από 1.

# Θεώρημα ομοφωνίας

1. $xy + x'y + yz = xy + x'y$
2. $(x + y) \bullet (x' + z) \bullet (y + z) = (x + y) \bullet (x' + z)$ -- dual

- Απόδειξη:

$$xy + x'z + yz = xy + x'z = (x + x')\, yz$$
$$= xy + x'z + xyz + x'yz$$
$$= (xy + xyz) + (x'z + x'zy)$$
$$= xy + x'z$$

Το 2 αληθές λόγο δυϊσμού.

# Πίνακες Αληθείας

- Απαριθμεί όλους τους πιθανούς συνδυασμούς τιμών μεταβλητών και την ανάλογη τιμή συνάρτησης.
- Στα δεξιά βλέπουμε πίνακες αληθείας για τις τυχαίες συναρτήσεις $F_1$ ( x, y, z ), $F_2$ ( x, y , z ), και $F_3$ ( x, y, z ).

| x | y | z | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

# Πίνακες Αληθείας (2)

- Πίνακας Αληθείας: **μοναδική ( κανονική = canonical )** αναπαράστηαση δυαδικών συναρτήσεων.
- Εάν οι 2 συναρτήσεις έχουν τους ίδιους πίνακες αληθείας, οι συναρτήσεις είναι ισοδύναμες ( ισχύει και αντιστρόφως ).
- Οι πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την απόδειξη θεωρημάτων ισοδυναμίας.
- Το μέγεθος ενός πίνακα μεγαλώνει **εκθετικά** βάση του αριθμού των μεταβλητών που εμπλέκονται. Επομένως, η χρήση δυαδικής άλγεβρας είναι πιο ελκυστική.

# Οι εκφράσεις Boole & μοναδικότητα

- Αντίθετα με τους πίνακες αληθείας, οι εκφράσεις που αντιπροσωπεύουν μία δυαδική συνάρτηση **δεν** είναι μοναδικές.
- Παράδειγμα:
  - $F(x, y, z) = x'y'z' + x'yz' + xyz'$
  - $G(x, y, z) = x'y'z' + yz'$
- Οι αντίστοιχοι πίνακες αληθείας για τις F ( ) και G ( ) φαίνονται στα δεξιά. Είναι ίδιοι!
- Άρα, F ( ) = G ( )

| x | y | z | F | G |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# Αλγεβρικοί Μετασχηματισμοί

- Η δυαδική άλγεβρα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την απλοποίηση ψηφιακών κυκλωμάτων.
- Γιατί; Απλούστερο συνήθως σημαίνει πιο φτηνό, μικρότερο, γρηγορότερο.
- Παράδειγμα: Απλοποίηση $F = x'yz + x'yz' + xz$.

$$
\begin{aligned}
F &= x'yz + x'yz' + xz \\
&= x'y\,(z + z') + xz \\
&= x'y \bullet 1 + xz \\
&= x'z + xz
\end{aligned}
$$

# Αλγεβικοί μετασχηματισμοί (2)

- Παράδειγμα: Αποδείξετε ότι

$$x'y'z' + x'yz' + xyz' = x'z' + yz'$$

- Απόδειξη:

$$x'y'z' + x'yz' + xyz'$$

Προσθέτουμε $x'yz'$ $= x'y'z' + x'yz' + x'yz' + xyz'$

$$= x'z'(y' + y) + yz'(x' + x)$$

$$= x'z' \bullet 1 + yz' \bullet 1$$

$$= x'z' + yz'$$

# Παράδεγμα απλοποίησης

- $x + x'y = ( x + x' )( x + y ) = 1 \bullet ( x + y ) = x + y$
- $x ( x' = y ) = xx' + xy = 0 + xy = xy$

Η απλοποίηση στοχεύει είτε

- Απλοποίηση παραγόντων ( εισόδων ).
- Απλοποίηση όρων ( πύλες ).

# Συμπλήρωμα συνάρτησης (F→F΄)

- Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης παράγεται από την ανταλλαγή ( • and + ) και ( 1 and 0 ) , και το συμπλήρωμα κάθε μεταβλητής ( DeMorgan ).
- Αλλιώς, η ανταλλαγή 1 ↔ 0 στην στήλη του πίνακα αληθείας της F δίνει την F΄.
- Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης **δεν είναι το ίδιο** με τον δυΐσμό ( dual ) μιας συνάρτησης.

# Συμπλήρωμα Παραδείγματα

- Βρείτε την G ( x, y, z ), εάν αυτή είναι το συμπλήρωμα της $F( x, y, z ) = xy'z' + x'yz$
- $G = F' = ( xy'z' + x'yz' )'$

  $= ( xy'z' )' \bullet ( x'yz )'$ *DeMorgan*

  $= ( x' + y + z ) \bullet ( x + y' + z' )$ *DeMorgan ξανά*
- *Σημείωση: Το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης μπορεί να παραχθεί με την με την εύρεση του δυϊσμού της συνάρτησης, και ακολούθως παίρνοντας το συμπλήρωμα όλων των literals ( παραγόντων ).*

# Κανονικές & πρότυπες μορφές

- Χρειαζόμαστε τυποποιημένε τεχνικές για την απλοποίηση δυαδικών συναρτήσεως.
  - Ελαχιστόροι και Μεγιστόροι.
  - Άθροισμα ελαχιστόρων & Γινόμενο Μεγιστόρων.
  - Γινόμενο και Άθροισμα όρων.
  - Αθροισμα Γινομένων ( Sum-of-Products – SOP ) και Γινόμενο Αθροισμάτων ( Product-of-Sums – POS ).

# Ορισμοί

- Παράγοντας: Μεταβλητή ή το συμπλήρωμα της.
- Αθροιστικός όρος: παράγοντες ενωμένοι με +
- Πολ/σκός όρος: παράγοντες ενωμένοι με •
- Ελαχιστόρος ( Minterm ): πολ/κός όρος στον οποίο όλες οι μεταβλητες εμφανίζονται ακριβώς 1 φορά, με κανονική ή συμπληρωματικη μορφή.
- Μεγιστόρος ( Maxterm ): αθροιστικός όρος στον οποίο όλες οι μεταβλητές εμφανίζονται ακριβώς 1 φορά, με κανονική ή συμπληρωματική μορφή.

# Ελαχιστόρος ( minterm )

- Αντιπροσωπεύει ακριβώς ένα συνδυασμό στον πίνακα αληθείας.
- Συμβολίζεται μ $m_j$, όπου **j είναι το δεκαδικό ισοδύναμο του ελαχιστόρου του αντίστιχου δυαδικού συνδυασμού ( $b_j$ ).**
- Μια μεταβλητή στο $m_j$ είναι συμπληρωματική εάν η τιμή της στο $b_j$ είναι 0, αλλιώς είναι κανονική.
- Παράδειγμα: Υποθέστε 3 μεταβλητές ( A, B, C ), και j = 3. Τότε, $b_j$ = 011 και ο αντίστοιχος ελαχιστόρος συμβολίζεται με $m_j = A'BC$.

# Μεγιστόρος ( maxterm )

- Αντιπροσωπεύει ακριβώς ένα συνδυασμό στον πίνακα αληθείας.
- Συμβολίζεται με $M_j$, όπου **j είναι το δεκαδικό ισοδύναμο του μεγιστόρου του αντίστοιχου δυαδικού συνδυασμού ( $b_j$ )**
- Μια μεταβλητή στο $M_j$ είναι συμπληρωματική εάν η τιμή της στο $b_j$ είναι 1, αλλιώς είναι κανονική.
- Παράδειγμα: Υποθέστε 3 μεταβλητές ( A, B, C ), και j = 3. Τότε $b_j$ = 011 και ο αντίστοιχος μεγιστόρος σμβολίζεται με $M_j = A + B' + C'$

# Ορισμοί Πινάκων (1)

- Οι ελαχιστόροι και οι μεγιστόροι είναι εύκολο να αναπαρασταθούν χρησιμοποιώντας πίνακα αληθείας.
- Παράδειγμα: Υποθέτουμε 3 μεταβλητές $x < y < z$ ( $<$ υπονοεί τη διάταξη των μεταβλητών ).

# Ορισμοί Πινάκων (2)

| x | y | z | Minterm | Maxterm |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $x'y'z' = m_0$ | $x + y + z = M_0$ |
| 0 | 0 | 1 | $x'y'z = m_1$ | $x + y + z' = M_1$ |
| 0 | 1 | 0 | $x'yz' = m_2$ | $x + y' + z = M_2$ |
| 0 | 1 | 1 | $x'yz = m_3$ | $x + y' + z' = M_3$ |
| 1 | 0 | 0 | $xy'z' = m_4$ | $x' + y + z = M_4$ |
| 1 | 0 | 1 | $xy'z = m_5$ | $x' + y + z' = M_5$ |
| 1 | 1 | 0 | $xyz' = m_6$ | $x' + y' + z = M_6$ |
| 1 | 1 | 1 | $xyz = m_7$ | $x' + y' + z' = M_7$ |

# Κανονικές Μορφές (1)

- Οποιαδήποτε δυαδική συνάρτηση F ( ) μπορεί να εκφραστεί ως ένα μοναδικό αθροισμα ελαχιστόρων και ένα μοναδικό γινόμενο μεγιστόρων ( με μια συγκεκριμένη διάταξη μεταβλητών ).
- Μα άλλα λόγια, κάθε συνάρτηση F ( ) έχει 2 κανονικές μορφές:
  - Κανονικό SOP ( άθροισμα ελαχιστόρων )
  - Κανονικό POS ( γινόμενο μεγιστόρων )

# Κανονικές μορφές (2)

- Κανονικό SOP :

  Οι ελαχιστόροι που συμπεριλαμβάνονται είναι οι $m_{j,}$ έτσι ώστε F ( ) = 1 στην γραμμή j του πίνακα αληθείας της F ( ).

- Κανονικό POS :

  Οι μεγιστόροι που συμπεριλαμβάνονται είναι οι $M_{j,}$ Έτσι ώστε F ( ) = 0 στην γραμμή j του αληθοπίνακα της F ( ).

# Παράδειγμα

- $f_1$ ( a, b, c )
- Η κανονική SOP μορφή της $f_1$ ( ) είναι

$f_1$ ( a, b, c ) = $m_1 + m_2 + m_4 + m_6$

= a΄b΄c + a΄bc΄+ ab΄c΄+ abc΄

- Η κανονική μορφή POS μορφή της $f_1$ ( ) είναι

$f_1$ ( a, b, c ) = $M_0 \bullet M_1 \bullet M_5 \bullet M_7$

= ( a + b + c ) • ( a + b΄+ c΄ ) •

( a΄+ b + c΄ ) • ( a΄+ b΄+ c΄ )

- Παρατηρείστε ότι: **$m_j = ( M_j )'$**

| a | b | c | $f_1$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

# Χρήση των Σ και Π

- $f_1$ ( a, b, c ) = $\sum$ m( 1, 2, 4, 6 ), όπου $\sum$ δείχνει ότι το $f_1$ είναι μια SOP μορφή, και m ( 1, 2, 4, 6 ) δείχνει ότι οι ελαχιστόροι που συμπεριλαμβάνονται είναι οι $m_{1,}$ $m_{2,}$ $m_4$ και $m_{6.}$
- $f_1$( a, b, c) = $\prod$ M ( 0, 3, 5, 7 ), όπου $\prod$ δείχνει ότι το $f_1$ είναι μια POS μορφή, και M ( 0, 3, 5, 7 ) δείχνει ότι οι μεγιστόροι που συμπεριλαμβάνονται είναι $M_0$, $M_3$, $M_5$ και $M_7$
- Αφού. $m_j$ = ( $M_j$ )΄ για κάθε j, τότε

$\sum$ m ( 1, 2, 4, 6 ) = $\prod$ M ( 0, 3, 5, 7 ) = $f_1$ ( a, b, c )

# Μετατροπή κανονικών μορφών

- Αντιστρέφουμε τα ∑ με ∏ ( ή αντίθετα ) και αντικαθιστούμε τα j που εμφανίζονται στην αρχική μορφή με αυτά που δεν εμφανίζονται.
- Παράδειγμα :

$f_1 ( a, b, c ) = a'b'c + a'bc' + ab'c' + abc'$

$= m_1 + m_2 + m_4 + m_6$

$= \sum ( 1, 2, 4, 6 )$

$= \prod ( 0, 3, 5, 7 )$

$= ( a + b + c ) \bullet ( a + b' + c' ) \bullet ( a' + b + c' ) \bullet ( a' + b' + c' )$

# Πρότυπες μορφές

- Οι πρότυπες μορφές είναι «όπως» τις κανονικές μορφές, με εξαίρεση ότι δεν είναι απαραίτητο για όλες τις μεταβλητές να εμφανιστούν σε ένα γινόμενο ( SOP ) ή άθροισμα ( POS ) ορών.
- Παράδειγμα:
  - $f_1$ ( a, b, c ) = a΄b΄c + bc΄ + ac΄

    είναι μια πρότυπη SOP μορφή $f_1$(a, b, c)
  - $f_1$ ( a, b, c ) = ( a + b + c ) • ( b΄+c΄) • ( a΄+c΄ )

    είναι μια πρότυπη POS μορφή.

# Μετατροπή POS από πρότυπη μορφή

- Επέκταση μη-κανονικών όρων με την εισαγωγή εκφράσεων ισοδύναμων σε 0, για κάθε μεταβλητή x που λείπει: $( xx' ) = 0$.
- Επιμεριστική ιδιότητα.
- Αφαίρεση διπλότυπων μεγιστόρων.
- Π.χ. $f_1 ( a, b, c ) = ( a + b + c ) \bullet ( b' + c' ) \bullet ( a' + c' )$

Προσθέσαμε αα′ ββ′

$aa' + b' + c' = (a' + b' + c' ) ( a' + b' + c' )$

$= ( a + b + c ) \bullet ( aa' + b' + c ) \bullet ( a' + bb' + c')$

$= ( a' + b + c' ) \bullet ( a + b' + c' ) \bullet ( a' + b' + c' ) \bullet ( a' + b + c' ) \bullet$
$( a' + b' + c')$

$=( a + b + c ) \bullet ( a + b' + c' ) \bullet ( a' + b' + c' ) \bullet ( a' + b + c' )$

# Μετατροπή σε άθροισμα minterms

- Εκφράστε την $F = A + B'C$ ως $\sum$ ( minterms )

$A + A ( B + B' ) = AB + AB'$

( Λείπει το C )

$AB ( C + C' ) + AB ( C + C' ) =$

$ABC + ABC' + AB'C + AB'C'$

Ομοίως

$B'C = B'C ( A + A' ) = B'CA + B'CA'$

Σύνολο:

$F = ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + AB'C + A'B'C$

$= m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$

# Μετατροπή σε γινόμενο Maxterms

- Εκράστε την $F = xy+x'z$ ώς $\prod$ ( Maxterms )

$= ( xy + x' ) ( xy + z ) = ( x + x') ( y + x') ( x + z ) ( y + z )$

$= (x' + y ) ( x + z ) ( y + z )$

$x' + y = x'+ y + zz' = ( x' + y + z ) ( x' + y + z' )$

$x + z = x + z + yy' = ( x + z + y ) ( x + z + y' )$

$y + z = y + z + xx' = ( x + y + z ) ( x' + z + y )$

Αν τα βάλουμε όλα μαζί...

$M_0 * M_2 * M_4 * M_5 = \prod ( 0, 2, 4, 5 )$

# Πίνακες αληθείας Λογικών Πύλών (1)

- **Πίνακας Αληθείας:** μορφή πίνακα που εκφράζει μοναδικά τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών εισόδου μιας συνάρτησης και των εξόδων της.
- AND 2-Εισόδων

| A | B | F = A • B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Πίνακες αληθείας Λογικών Πύλών (2)

- OR 2- Εισόδων

| A | B | F = A + B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

# Πίνακες αληθείας Λογικών Πυλών (3)

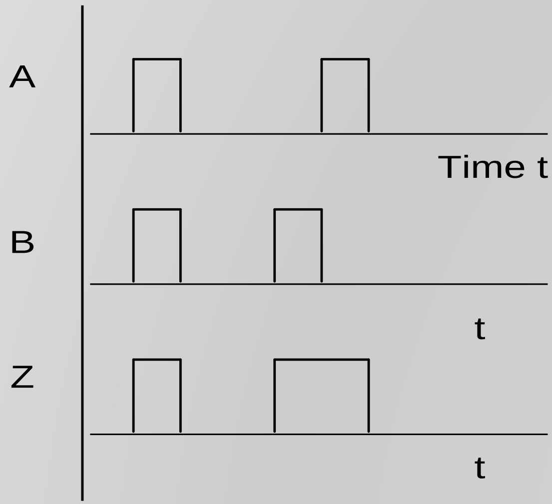
- NOT

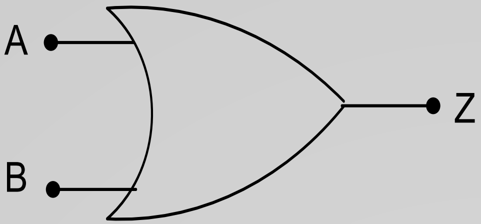
| A | F = A′ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

# Πύλη OR

- Η έξοδος είναι αληθής ( true ) εάν μια από τις εισόδους ή και οι δύο είναι αληθείς ( 1 )

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



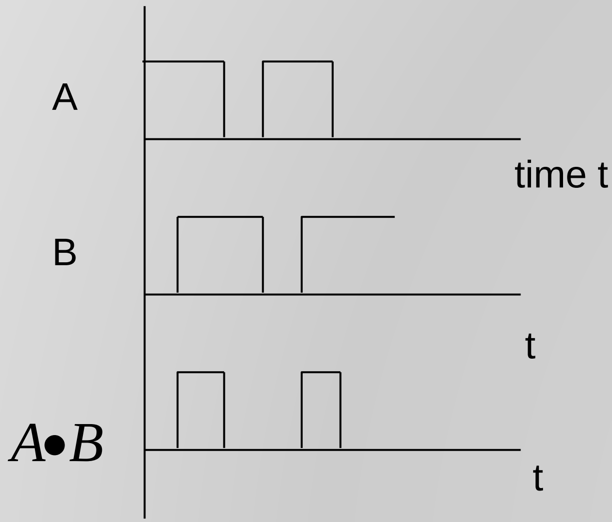



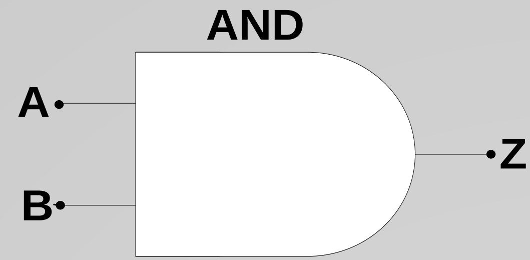

$$Z = A + B$$

# Πύλη AND

- Η έξοδος είναι αληθής ( 1 ), όταν και οι δύο είσοδοι είναι αληθείς ( 1 )

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

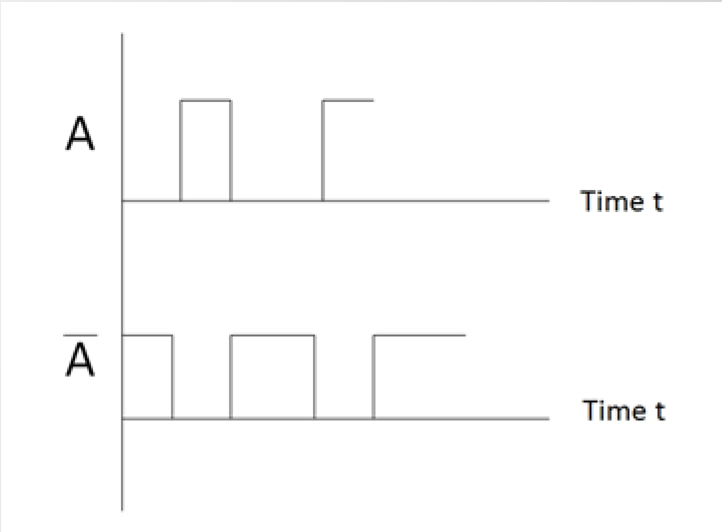


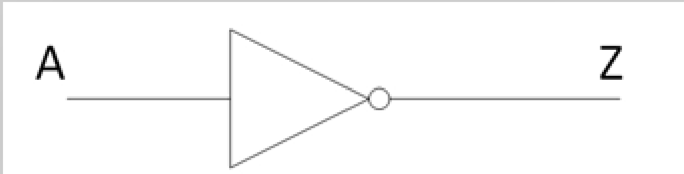




$$Z = A \cdot B$$

# Πύλη NOT

- Δημιουργεί αντιστροφή του σήματος εισόδου

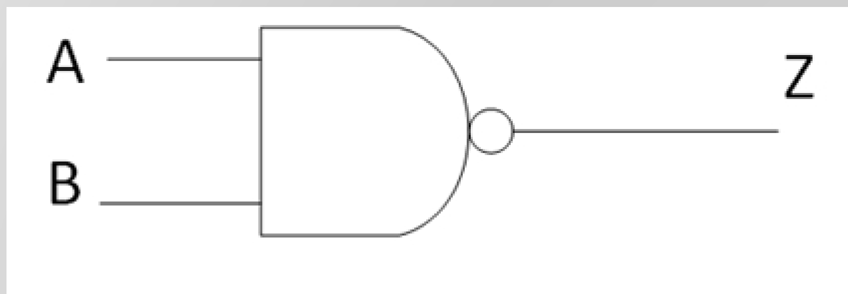



$$Z = \overline{A}$$

# Πύλη NAND (1)

- Η έξοδος είναι ψευδής ( 0 ) μόνο όταν A και B είναι αληθείς ( 1 )




$$Z = \overline{A \cdot B}$$

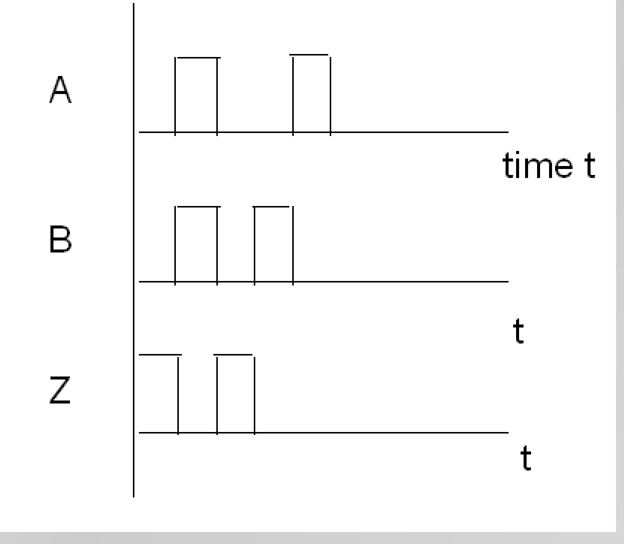
# Πύλη NAND (2)

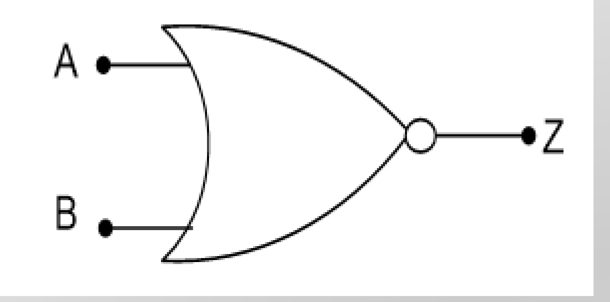
- NAND ( NOT AND ) 2-εισόδων

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# Πύλη NOR (1)

- Η έξοδος είναι αληθής ( 1 ), όταν και οι δύο είσοδεοι είναι ψευδείς ( 0 )




$$Z = \overline{A + B}$$

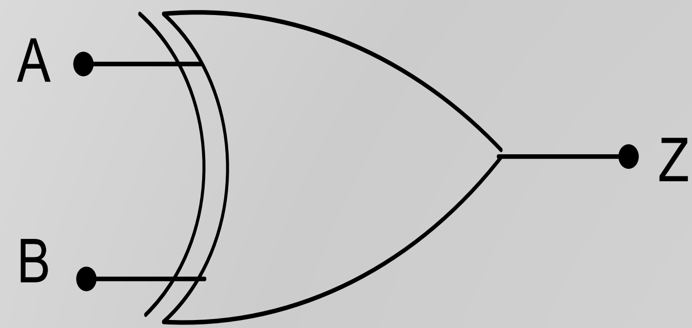
# Πύλη NOR (2)

- Πύλη NOR ( NOT OR )

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

# Πύλη XOR (1)

- Η έξοδος είναι αληθής ( 1 ), όταν η μία εκ των δύο εισόδων είναι αληθής ( 1 ), αλλά όχι και οι δύο ταυτόχρονα




$$Z = A \oplus B$$

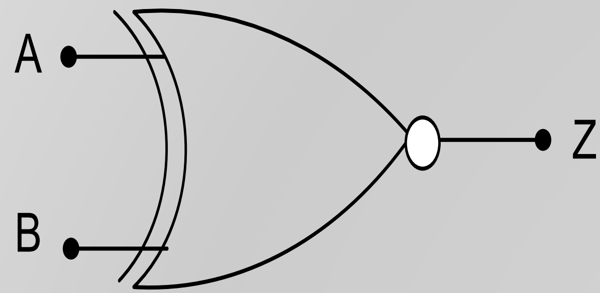
# Πύλη XOR (2)

- Πύλη XOR

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# Πύλη XNOR (NOT XOR) (1)

- Η έξοδος είναι αληθής ( 1 ) όταν και οι δύο είσοδοι είναι ψευδείς ( 0 ), ή και οι δύο είναι αληθείς ( 1 )



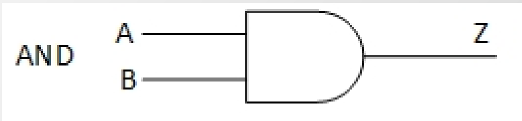

$$Z = \overline{A \oplus B}$$

# Πύλη XNOR (2)

- Πύλη XNOR ( NOT XOR )

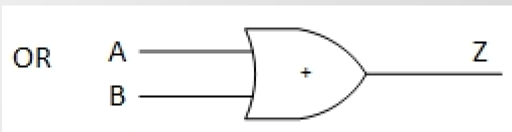
| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

# Συνοπτικός Πίνακας Πυλών



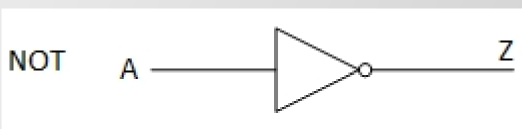

$Z = A \cdot B$

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



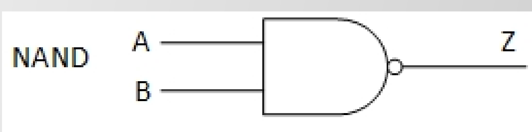

$Z = A + B$

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



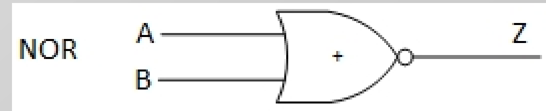

$Z = \overline{A}$

| A | Z |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |



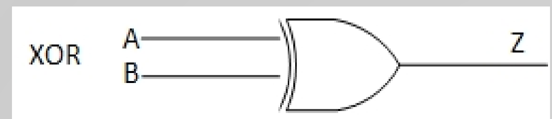

$Z = \overline{A \cdot B}$

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |



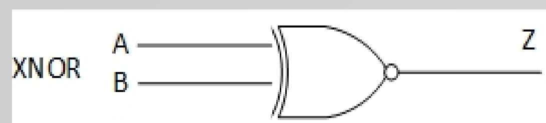

$Z = \overline{A + B}$

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |




$Z = A \oplus B$

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |



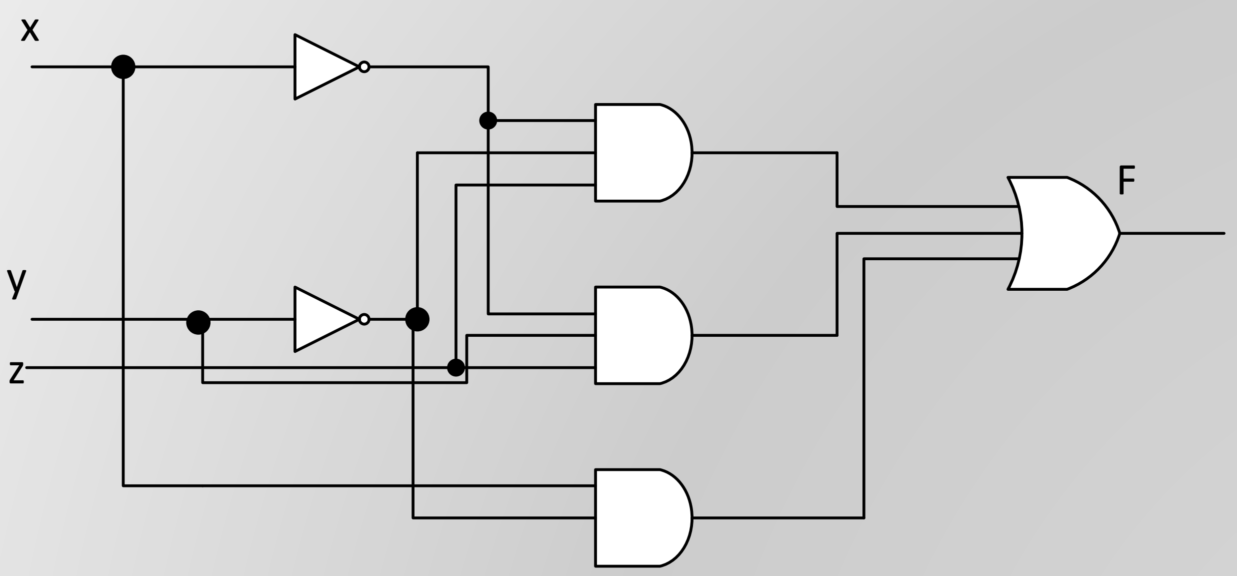

$Z = \overline{A \oplus B}$

| A | B | Z |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Παράμετροι λογικών πυλών

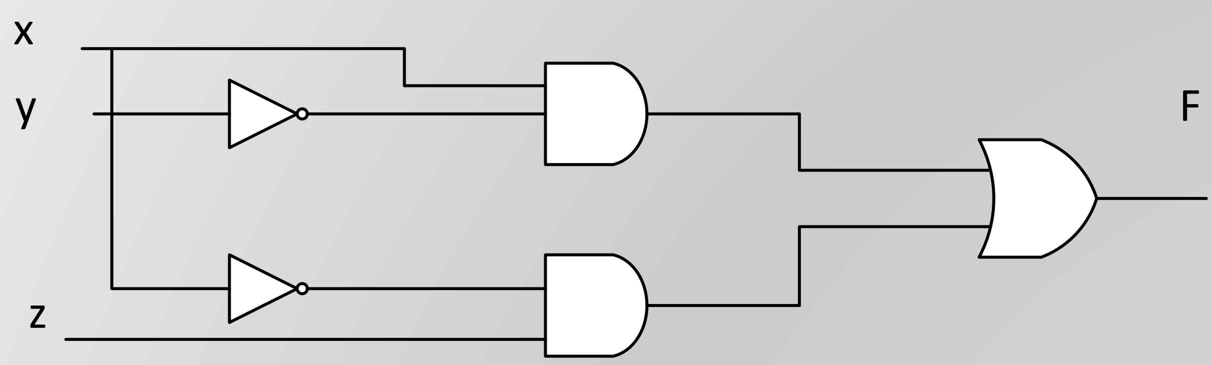
- Ικανότητα οδήγησης ( fanout ): Πόσα τυπικά φορτία μπορεί να οδηγήσει.
- Τυπικό φορτίο ( ποσό του ρεύματος που απαιτείται ).
- Κατανάλωση ισχύος ( power dissipation): ισχύς τροφοδοσίας για να λειτουργήσει.
- Καθυστέρηση διάδοσης ( propagation delay). Μέσος χρόνος αλλαγής σήματος από είσοδο στην έξοδο.
- Περιθώριο θορύβου ( noise margin ): Ελάχιστη τάση εξωτερικού θορύβου που προκαλεί ανεπιθύμητη αλλαγή στην έξοδο.

# Υλοποίησης συνάρτησης (1)




$F = x'y'z + x'yz + xy'$

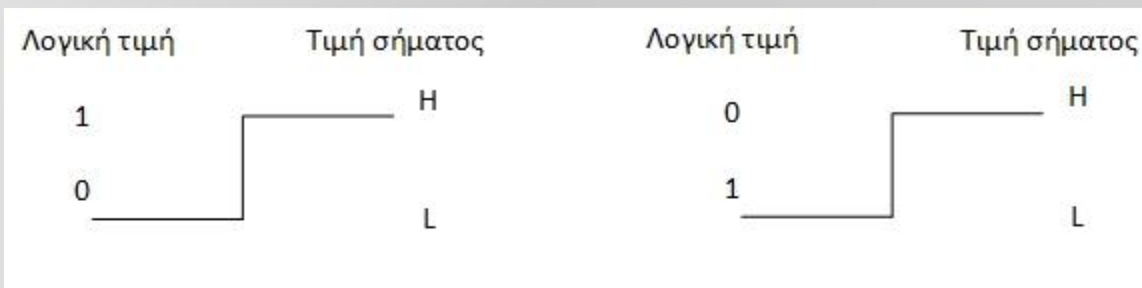
# Υλοποίησης συνάρτησης (2)




$$F = xy' + x'z$$

# Θετική & Αρνητική Λογική

- Οι πύλες μπορεί να έχουν κατασκευαστεί ώστε να θεωρούν τη λογική τιμή 1 όταν υπάρχει Η ( θετική λογική ) ή όταν υπάρχει L ( αρνητική λογική )




(α) Θετική λογική

(β) Αρνητική λογική

# Τέλος Ενότητας